ЛА' 06.11

Нека F е числово поле
Нека V е множество
Казваме че V е линейно пространство над F, ако в V са дефинирани две операции

1) Събиране на вектори $\oplus$ (за $\forall$ елемент на V)
2) Умножение на вектор със скалар $\odot$
   Фиксираме $a,b,c \in V$; $\lambda, \mu \in F$

1) Събирането е асоциативно; $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c$
2) Събирането е комутативно ; $\forall a \oplus b = b \oplus a$
3) $\exists \mathcal{O} \in V$ т.че $\forall a \in V \quad a \oplus \mathcal{O} = a$ ($\mathcal{O}$ - нулев вектор)
4) $\forall a \in V \ \exists (a') \in V$ т.че $a \oplus a' = a' \oplus a = \mathcal{O}$
   a' - противоположен вектор
5) $\forall a \in V \quad 1 \odot a = a \odot 1 = a \qquad 1 \in F$
6) $\forall \lambda \in F \quad , \forall a,b \in V \ , \ \lambda \odot (a \oplus b) = (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b)$
7) $(\lambda \oplus \mu) \odot a = (\lambda \odot a) + (\mu \odot a) \quad \forall \lambda \mu \in F \ , \forall a \in V$
8) $(\lambda \mu) \odot a = \lambda \odot (\mu \odot a) = \mu \odot (\lambda \odot a) = \lambda \odot \mu \odot a$
   $\forall \lambda \mu \in F \quad \forall a \in V$

Нека $\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a\,b\,c \in \mathbb{R}\}$
$(a_1 b_1 c_1)(a_2 b_2 c_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(a_1 b_1 c_1) + (a_2 b_2 c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$
$\lambda \odot (a_1 b_1 c_1) = (\lambda a_1, b_1 \lambda, c_1 \lambda)$
$(a_i b_i c_i)(i = \overline{1,3}) \in \mathbb{R}^3 \quad \lambda \mu \in \mathbb{R}$

1) $[(a_1 b_1 c_1) \oplus (a_2 b_2 c_2)] \oplus (a_3 b_3 c_3) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3)$
2) $(a_1 b_1 c_1) \oplus (a_2 b_2 c_2) = (a_2 b_2 c_2) \oplus (a_1 b_1 c_1)$
3) $\mathcal{O}(000) \quad (a_1 b_1 c_1) \oplus (000) = (a_1 b_1 c_1)$
4) $A = (a_1 b_1 c_1) \ , \ -A(-a_1 - b_1 - c_1) \ ; \ A + (-A) = (000) = \mathcal{O}$
5) $1 \odot (a_1 b_1 c_1) = (a_1 b_1 c_1)$

6) $\lambda \odot ((a_1 b_1 c_1) \oplus (a_2 b_2 c_2)) = (\lambda(a_1+a_2), \lambda(b_1+b_2), \lambda(c_1+c_2)) =$
$(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) + (\lambda a_2 \lambda b_2 \lambda c_2) = \lambda(a_1 b_1 c_1) \oplus \lambda(a_2 b_2 c_2)$

7) $(\lambda+\mu) \odot (a_1 b_1 c_1) = (\lambda \cdot (a_1 b_1 c_1)) + (\mu(a_1 b_1 c_1))$

8) $\lambda\mu (a_1 b_1 c_1) = (\lambda\mu a_1, \lambda\mu b_1, \lambda\mu c_1)$

P^3 - множеството от всички полиноми от степен ненадминаваща 3

Ако $f = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

$g = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$

$f + g = (a_0+b_0) x^3 + (a_1+b_1) x^2 + (a_2+b_2) x + a_3 + b_3$

$\lambda f \geq \lambda a_0 x^3 + \lambda a_1 x^2 + \lambda a_2 x + \lambda a_3$

Нека K е множеството от всички положителни реални числа

Въвеждаме $\oplus$ и $\odot$ по правилото $a \oplus b = ab$

$\lambda \odot a = a^\lambda \quad a, b \in V \quad \lambda \in R$

1) $(a \oplus b) \oplus c = ab \oplus c = abc = a + (bc) = a \oplus (b \oplus c)$

2) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$

3) $\mathcal{O} \oplus a = a \Leftrightarrow (\mathcal{O} a) = a \Rightarrow \mathcal{O} = 1$

4) $\forall a \in V \ \exists a'$ т.е. $a + a' = \mathcal{O} \Rightarrow (aa') = 1$

$1/a$ е т.е. $a \, 1/a = 1$

$1/a \in V \Rightarrow a' = 1/a$

5) $1 \odot a = a^1$

6) $(\lambda+\mu) \odot a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda \odot a^\mu = (\lambda \odot a) \oplus (\mu \odot a)$

7) $\lambda \odot (a \oplus b) = (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b) = a^\lambda b^\lambda$

8) $(\lambda\mu) \odot a = a^{\lambda\mu} = \lambda \odot (\mu \odot a)$

F е числово поле

$M_{m\times n}(F)$ е линейно пространство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot \end{matrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & & & b_{mn} \end{vmatrix}$$

с обичайните събиране и умножение на матрици

Линейна комбинация

V - линейно пространство ; $a_1 a_2 \dots a_n \dots \in V$

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \dots \in F$

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \dots \lambda_n a_n \dots$ е линейна комбинация на векторите $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ с коефициенти $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \dots$

Ако $W \subseteq V$ е подмножество

(W - линейно пространство)

Всяка линейна комбинация на вектори от W се остава в W

$W \subseteq \mathbb{R}^3$

$$W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{Деф}$$

Непразното множество W е подпространство на $V \Leftrightarrow$

1) $\forall a b \in W \Rightarrow a + b \in W$
2) $\forall \lambda \in F \quad a \in W \Rightarrow \lambda a \in W$

1) Нека W е подпространство на $V \Rightarrow a + b \in$ ЛК на $a b \Rightarrow a + b \in W$
2) $\forall \lambda \in F \; \forall a \in V \quad \lambda \cdot a \Rightarrow \in W$

3) Нека са изпълнени 1) и 2) и $W \neq \emptyset$ (непразно) $\Rightarrow$
$\exists\, a \in W$ и $\lambda \in F \Rightarrow \lambda \cdot a \in W$

Да допуснем че за $k \in N$ т.че $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \in F$
и $a_1 a_2 \dots a_k \in W$ $\Lambda k (\lambda_1 \cdot a_1) + (\lambda_2 \cdot a_2) + \dots (\lambda_k a_k) \in W$
тогава нека $\lambda \in F$ $a \in W \Rightarrow$ от св-во 1 $\Rightarrow \in W$

Докажете че сечение от произволна фамилия
а) от подпространство на V също е подпространство на V
б) Обединение на две подпространства на V е подпространство на V
$\Rightarrow$ едното се съдържа в другото

Док-во

а) $W_1, W_2 \dots W_k \dots$ са подпространства на V
$V = \cap W_i$ е подпространство на V
Нека $ab \in W \Rightarrow ab \in W_i$ $\forall i$
W_i е подпространство на V
$\forall a \in W \Rightarrow \forall i$ $a \in W_i$
$\forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda a \in W_i$ $\forall i \Rightarrow \lambda a \in W$

б) 1. Нека V_1 и V_2 са подпространства на V
Нека $V_1 \subset V_2$; $V_1 \cup V_2 = V_2$ еда но V_2 е подпространство на V $\Rightarrow$
$V_1 \cup V_2$ е подпространство на V
2. Нека $V_1 \cup V_2$ е подпространство на V
Нека $\exists\, c \in V_1, c \notin V_2$
$\exists\, d \in V_2, d \notin V_1$
$\Rightarrow c+d \in V_1 \cup V_2$
Нека $c+d \in V_1 \Rightarrow c+d = V_1 \in V_1$
тогава $d = V_1 + (-c) \in V_1$
но $d \notin V_1$ - в противоречие

Опр

Нека A е подмножество на линейно пространство V

$\ell(A)$ - множеството от всички линейни комбинации на вектори от A с коефициенти от F

$\ell(A)$ - линейна обвивка на множеството A

ОТР

Нека $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ е система от вектори от векторно пространство V

Казваме че векторите са ЛНЗ, ако $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \in F$

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \dots = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots \lambda_n = \dots = 0$

Казваме че векторите са ЛЗ ако $\exists \lambda_i \neq 0$ т.че

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_n a_n \dots = \vec{0}$

Нека V е нетривиално линейно пространство

$B \in V$, $B \neq 0$

Казваме че B е базис на пространство V, ако B е ЛНЗ система от вектори и $\ell(B) = V$

$$M_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a\,b\,c\,d \in F \right\}$$

E - матрична единица

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+i\operatorname{tg}(\alpha)}{1-i\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\left(1+i\operatorname{tg}^2(\alpha)\right)^2}{1+i\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1+2i\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}^2(\alpha)}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ |z| = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}} = 1$$

$$z = 1\left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$$

$$\cos\varphi = -1/2 \qquad \sin\varphi = \sqrt{3}/2$$

$$\varphi = 5\pi/6 \Rightarrow \left(\cos 5\pi/6 + i\sin 5\pi/6\right)^{3k+2}$$

$$\left(1^{(3k+2)}\left(\cos\frac{(3k+2)\frac{5\pi}{6}}{6} + i\sin\frac{(3k+2)\,5\pi/6}{6}\right)\right) = \cos\frac{3k5\pi+25\pi}{6} + i\sin\frac{3k5\pi+2\cdot}{6}$$

$$\begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & 0 & \cdots \\ 0 & y & x+y & x & 0 \\ \cdots & & & & \\ & & & y & x+y \end{vmatrix}$$

разложение по 1-ой стр. $\Rightarrow$

$$\Delta_n = (x+y)\Delta_{n-1} + (-1)^3 x \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots \\ 0 & y & x+y & \cdots \\ \cdots & & & \\ & & y & x+y \end{vmatrix}$$

разложение по 1-ому столбцу

$$(x+y)\Delta_{n-1} - x(-1)^2 y\,\Delta_{n-2}$$

$$\Delta_n = \Delta_{n-1}(x+y) - xy\,\Delta_{n-2}$$

$$t^2 - (x+y)t + xy = 0$$

$$D = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \ ;\ D = x-y$$

$$t_1 = \frac{x+y+x-y}{2} = x \ ;\ t_2 = \frac{x+y-x+y}{2} = y$$

Ако $x=y \Rightarrow \Delta_n = x^n C_1 + nx C_2$

$\Delta n=1 \mid x+y = xC_1 + xC_2$

$\Delta n=2 \mid (x+y)^2 - xy = x^2 C_1 + 2x^2 C_2$

$$\left| \begin{array}{l} 2x = xC_1 + xC_2 \\ 4x^2 - x^2 = x^2 C_1 + 2x^2 C_2 \end{array} \right\} -x$$

$x^2 = x^2 C_2 \qquad C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$\Delta_n = (n+1)x^n$

Да се намери A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right| \qquad AX = E$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 3 & 1 & & 1 & & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & 0 & 1 & \\ 0 & 2 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$\sim$